Correction du sujet de baccalauréat technologique session 1999

Exercice N°1

1) Notons Ω l'ensemble des issues possibles de l'expérience considérée. Chacune de ces issues possibles est une combinaison de deux éléments pris dans un ensemble à 15 éléments.
   On a $\mathrm{Card}(\Omega) = C_{15}^2$ soit $\mathrm{Card}(\Omega) = 105$
   L'événement A est réalisé si les deux jetons sont tirés parmi les trois jetons rouges, d'où $\mathrm{Card}(A) = C_3^2$ soit $\mathrm{Card}(A) = 3$
   Puisque les jetons sont indiscernable au toucher, les événements élémentaires sont considérés comme équiprobables. Dans ces conditions la probabilité p(A) de l'événement A est donnée par $p(A) = \dfrac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$ soit $p(A) = \dfrac{1}{35}$
   <u>Conclusion</u> : la probabilité de l'événement A est 1/35

2) L'événement B est réalisé si les deux jetons tirés sont pris parmi les trois rouges ou parmi les quatre noirs ou parmi les huit jetons blancs d'où :
   $\mathrm{Card}(B) = C_3^2 + C_4^2 + C_8^2$ soit $\mathrm{Card}(B) = 37$
   Les événements élémentaires étant équiprobables, on a $p(B) = \dfrac{\mathrm{Card}(B)}{\mathrm{Card}(\Omega)}$
   <u>Conclusion</u> : la probabilité de l'événement B est $p(B) = \dfrac{37}{105}$

3) Notons $\overline{C}$ l'événement contraire de l'événement C. $\overline{C}$ est donc l'événement : "aucun des deux jetons n'est blanc". On a $\mathrm{Card}(\overline{C}) = C_7^2$ soit $\mathrm{Card}(\overline{C}) = 21$ car $\overline{C}$ est réalisé si les deux jetons sont tirés parmi les 7 jetons rouges ou noirs.
   La probabilité l'événement $\overline{C}$ est $p(\overline{C}) = \dfrac{21}{105}$ soit $p(\overline{C}) = 0{,}2$
   Puisque $p(\overline{C}) + p(C) = 1$, on en déduit que la probabilité de l'événement C est p(C)=0,8.

4) Notons D l'événement « les deux jetons sont blancs »; dans cette question, on cherche la probabilité de l'événement D sachant que l'événement B est réalisé. La probabilité que les deux jetons soient blancs sachant que les deux jetons sont de la même couleur est notée p(D/B) ou encore $p_B(D)$ et ce nombre est défini par $p(D/B) = \dfrac{p(D \cap B)}{p(B)}$.
   Or l'événement $D \cap B$ n'est autre que l'événement D.
   $p(D) = \dfrac{C_8^2}{105}$ soit $p(D) = \dfrac{28}{105}$ et donc $p(D \cap B) = \dfrac{28}{105}$.
   D'après la question 2, $p(B) = \dfrac{37}{105}$, d'où $p(D/B) = \dfrac{28}{105} \times \dfrac{105}{37}$ soit $p(D/B) = \dfrac{28}{37}$
   <u>Conclusion</u> : la probabilité que les deux jetons soient blancs sachant qu'ils sont de la même couleur est 28/37.

Exercice N°2

Notons X la variable aléatoire prenant pour valeur la masse d'un paquet pris au hasard.

D'après l'énoncé, la loi de probabilité de cette variable aléatoire X est la loi normale de moyenne 1,01 et d'écart-type 0,01.

Pour calculer les probabilités demandées on utilise le théorème suivant :
Dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire X est la loi normale N(1,01 ; 0,01), est équivalent à dire que la loi de probabilité de la variable aléatoire U définie par $U = \frac{X - 1{,}01}{0{,}01}$ est la loi normale centrée et réduite.

1) La probabilité qu'un sachet pris au hasard ait une masse inférieure à 1 kg est notée p (X<1).

Les deux inégalités X<1 et U<-1 sont équivalentes, d'où :
$p(X < 1) = p(U < -1)$
or p(U< -1)=1-p(U< 1).
Dans la table de la loi normale centrée réduite, on peut lire que p(U<1)=0,841
soit p(X<1)=0,159.

<u>Conclusion</u> : La probabilité que la masse d'un sachet pris au hasard soit inférieure à 1 kg est 0,159 à 0,001 près. On en déduit que pour un lot de 1000 sachets, 159 est un nombre approximatif de sachets ayant une masse inférieure à 1 kg.

2 a) La probabilité qu'un sachet pris au hasard ait une masse supérieure à 1,025 kg est notée

p (X > 1,025) ; or p(X > 1,025)=1-p(X ≤ 1,025)
et $p(X \leq 1{,}025) = p(U \leq 1{,}5)$

Dans la table de la loi normale centrée réduite, on peut lire que p(U≤1,5)=0,933
d'où p(X>1,025)=0,067

<u>Conclusion</u> : Pour un lot de 1000 sachets, 67 est un nombre approximatif de sachets ayant une masse supérieure à 1,025 kg .

2 b) La probabilité qu'un sachet pris au hasard ait une masse comprise entre 1 kg et 1,015 kg est p (X<1,015)- p(X≤1) ou p(1<X≤1,015).

Or $p(X < 1{,}015) = p(U < 0{,}5)$

On obtient finalement p (X<1,015) - p(X<1) = 0,532 à 0,001 près.

Conclusion : Pour un lot de 1000 sachets, 532 est un nombre approximatif de sachets ayant une masse comprise entre 1kg et 1,015 kg.

Exercice N°3

Partie A

1)

- La droite (T) passe par les points de coordonnées (0; 1) et (1; 0). Son ordonnée à l'origine est b=1 et son coefficient directeur est $\frac{0-1}{1-0}$ soit -1
  On en déduit que y = -x+1 est l' équation réduite de cette droite (T).
- f (0) est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0. On peut lire que f(0)=1.
- f '(0) est le coefficient directeur de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0. Cette tangente est la droite (T),d'où f '(0)=-1.

2) On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par f(x)= x + a + be^{-x}.
On sait d'après la lecture graphique que f(0) = 1 et que f '(0) = -1.
Or la dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par f '(x)=1-be^{-x}.
On en déduit donc que les réels a et b sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 1-b=-1 \end{cases} \text{ système équivalent à } \begin{cases} a=1-b \\ b=-2 \end{cases}$$

Ce système admet un seul couple solution. On obtient a = -1 et b = 2.

Partie B

1) La fonction f est dérivable sur R. Sa dérivée est la fonction f ' définie sur R par
f '(x)=1-2e^{-x} **.** Etude du signe de f '(x).
Les inéquations suivantes sont équivalentes :
f '(x) > 0
2e^{-x}< 1
e^{-x} < 0,5
ln(e^{-x}) < ln(0,5) car la fonction ln est une fonction strictement croissante sur]0;+∞[
-x < ln(0,5)
x > ln(2) car $\ln(0{,}5)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)$ soit $\ln(0{,}5)=-\ln(2)$

Par un raisonnement identique, on obtient que f '(x) < 0 si et seulement si x < ln(2) et que f '(x) = 0 si et seulement si x = ln(2).

De ces résultats, on déduit que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle
]-∞; ln(2)] et que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle [ln(2);+∞[.

La fonction f admet donc un minimum en x=ln(2) et la valeur exacte de ce minimum est
f(ln(2)). Calcul de f(ln(2))
f(ln2)=ln(2) -1+2e$^{-\ln(2)}$ e$^{-\ln(2)}$=0,5

soit $f(\ln(2))=\ln(2)$

On peut résumer ces résultats sur les variations de la fonction f dans le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\ln(2)$		$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$		↘	$\ln(2)$	↗	

3 b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives sur cet intervalle: la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 0,5x^2-x-2e^{-x}$ est une des primitives de f sur $\mathbb{R}$.

c) f est positive sur l'intervalle [1; 3] et l'unité d'aire est égale à 1 cm².
L'aire A_1, exprimée en cm², du domaine plan limité par la courbe (C) , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=3 est donc égale à :

$$A_1 = \int_1^3 f(t)dt$$

$$A_1 = F(3) - F(1) \quad \text{soit } A_1 = 2 - 2e^{-3} + 2e^{-1}$$

2,636 est une valeur approchée de A_1 à 0,001 près.

de même , on obtient

$$A_2 = \int_1^3 (t-1)dt \qquad \text{(aire d'un triangle rectangle isocèle)}$$

$$A_2 = 2$$

On en déduit la valeur exacte de A.
$A=A_1-A_2$ soit $A=2e^{-1}-2e^{-3}$
0,64 est une valeur approchée de A à 0,01 près.